数理解析研究所講究録
235巻 1975年 102-116

On strongly radicial Galois objects

神大 教養　竹内 康滋

§1. 導入　以下、Aは単位元1をもつ可換環とする。Cを A-algebra とする。finite commutative Hopf algebra H (over A) の dual Hopf algebra H^* が C を C に measure し、次の2つの条件をみたすとき、C を <u>Galois H-object</u> という(1969年に Chase と Sweedler によって定義された)。

(1) C は finitely generated faithful projective A-module

(2) measuring によって自然に定義される写像

$$C \#_A H^* \to \mathrm{Hom}_A(C, C)$$

が、環同型である。

K^* を admissible Hopf subalgebra of H^* とする。すなわち、Hopf algebra の homomorphism $f: H^* \to K^*$ があって、f は epimorphism で、A-module homomorphism として split している。B は C の subalgebra とする。今、$w \in C \otimes H^*$ に対して、$w(B) = 0$ となるのは、$w \in C \otimes H^* \mathfrak{a}_{K^*}$ のとき、そのときに限るなら

ば，$B \to K^*$ とかく．ただし，$\mathfrak{a}_{K^*}$ は，coalgebra K^* の augmentation ε_{K^*} の kernel である。

1969年に Chase と Sweedler は次の定理を証明した。

定理．H を finite commutative Hopf algebra とし，A-algebra C は Galois H-object とする．このとき対応 $K^* \mapsto C^{K^*}$ は，admissible Hopf subalgebra of H^* と certain subalgebra of C との間に1対1対応を与える。

ここで，$C^{K^*} = \{c \in C \mid dc = \varepsilon(d)c \text{ for } {}^\forall d \in K^*\}$，certain subalgebra とは，admissible Hopf subalgeba K^* of H^* が存在して，$B \to K^*$ となるような B のことである。このことからわかるように，Galois 対応で対応する subalgebra の good characterization を与えているとは言い難い。ところが，Hopf-algebra H が，C の有限 A-automorphism group の group ring の dual であるときには，Galois H-object は，Chase, Harrison, Rosenberg の Galois extension となり，上の定理は，そのときの Galois correspondence theorem を意味していることが，Chase と Sweedler によって示されている．ところで，当然のこととして，次の問題が起る

問題 I．H^* が higher order derivation で生成（algebra として）されているときは，Galois 対応に表われる subalgeba は何か

ここでは もう一つの問題を考える。

問題II. やはりH^*がhigher order derivationで生成されているとき，subringの列 $C = C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n = A$ が存在して. (1) C_iは有限生成projective C_{i+1}-module (2) $C_i[\mathcal{D}er_1(C_i/C_{i+1})] = \mathrm{Hom}_{C_{i+1}}(C_i, C_i)$ (ただし，$\mathcal{D}er_1(C_i/C_{i+1})$は，$C_{i+1}$-derivation in C_iの集合) なるように出来るか。

問題IIを考える理由の一つは，そのようなsubringの列があれば，S. Yuanによって Amitsur's cohomology group $H^n(C_i/C_{i+1})$が，$n \geqq 3$のとき消えることが示されている. したがって $H^n(C/A) = 0$ $(n \geqq 3)$ が出ることになる。

問題Iは，$\mathrm{char}(A/\mathfrak{z}) \neq 0$ $(\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A))$ なる環Aなるとき，完全な解答を与えることが出来る。 問題IIについては，標数が0でない体Aについて，affirmative answerを与えることが出来る。

§2. 準備.

Aを単位元1をもつ可換環とする。HをA上のcoalgebra，δをその diagonal map，εを augmentation map とする。このとき元$g \in H$がgrouplikeであるとは，$\delta(g) = g \otimes g$，$\varepsilon(g) = 1$なるときをいう。coalgebra Hがsplitしているとは，HがA-moduleとして，次のようになっているときをいう. すなわち，$H = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}(H)} U_g$. ただし，$U_g$は$g$を唯一つのgrouplike elementとして含むsubcoalgebraで，$U_g = Ag + (U_g \cap \mathrm{Ker}(\varepsilon))$ なる

ものである。

A上の Hopf algebra H が A-module として finitely generated projective なるとき，H は finite Hopf algebra という。このとき H の dual H^* も finite Hopf algebra である.

次に higher order derivation および strongly radicial extension についてふれておく．C を A-algebra とする．今，$D \in Hom_A(C, C)$ に対して，$[D, a] \in Hom_A(C, C)$ $(a \in C)$ を次のように定義する.

$$[D, a](x) = D(ax) - aD(x) - D(a)x \qquad (x \in C)$$

このとき，$D \in Hom_A(C, C)$ が通常の derivation であるために，$[D, a] = 0$ $({}^{\forall}a \in C)$ なることが必要かつ十分な条件である。ところで，C の任意の q 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_q$ に対して，$[[\cdots[D, a_1]a_2]\cdots a_q] = 0$ なるとき，D を q-th order derivation という。q-th order derivation on C の全体からなる集合を $\mathcal{D}er_q(C/A)$ とかく．$\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathcal{D}er_q(C/A)$ を $\mathcal{D}er(C/A)$ で表わす。このとき，$\mathcal{D}er(C/A)$ は，$Hom_A(C, C)$ の left C-submodule かつ subring をなす。$\nu: C \to Hom_A(C, C)$ を $\nu(c)(x) = cx$ $(c, x \in C)$ とすれば，$\nu(C) + \mathcal{D}er(C/A) = \nu(C) \oplus \mathcal{D}er(C/A)$．これを $\mathcal{D}(C/A)$ とおくと，$\mathcal{D}(C/A)$ は A-subalgebra of $Hom_A(C, C)$ である．したがって derivation algebra of C/A と呼ばれる。

今，C は可換環 A の可換拡大環とする。このとき J＝

$= J_{C/A} = \mathrm{Ker}(C \otimes_A C \to C)$ とおく.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \otimes y \mapsto xy$

定義. A は各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $A/\mathfrak{p}$ の標数 $\neq 0$ なるものとする。拡大 C/A が次の2つの条件をみたすとき, C は strongly radicial extension という。

(1) C は A-module として, 有限生成射影的.

(2) $J_{C/A}$ は nilpotent.

以下. 可換環 A は, 各素イデアル $\mathfrak{p}$ について, $A/\mathfrak{p}$ の標数 $\neq 0$ なるものと仮定する.

拡大 C が A-module として, 有限生成射影的であれば C が strongly radicial extension になるために, $\mathfrak{D}(C/A) = Hom_A(C, C)$ となることが, 必要かつ十分な条件である。

後の準備のために, 証明なしで次の定理を述べておく.

定理 (Galois correspondence theorem). C は strongly radicial extension of A とする。

$\Delta = \{E \mid$ C-module direct summand of $\mathfrak{D}_n(C/A)$ で, 積に関して閉じており, かつ operator [ ] についても閉じている $\}$

$\Gamma = \{B \mid$ C と A の中間環で C が B-projective $\}$

このとき Δ と Γ の間に 1対1対応がつく。その対応は

$E \mapsto Ker(E) = \{x \in C \mid D(x) = 0 \ {}^{\forall}D \in E\}$ $(E \in \Delta)$ で, $B \mapsto \mathcal{D}er(C/B)$ $(B \in \Gamma)$ がその逆対応である。

§3. 問題Iについて. H を finite commutative Hopf algebra/A とする。Galois H-object C において, もし dual Hopf algebra H^* が, A-algebra として, higher order derivation で生成されるならば, C は A 上 strongly radicial extension である (Galois correspondence theorem の上に書いたことを参照)。したがって, 次の定理は問題Iの解を与えている。

定理1. H を finite cocommutative split Hopf algebra/A とする。C を A 上 strongly radicial な Galois H^*-object であるとする。

$$\mathcal{F} = \{U \mid \text{sub(bi)algebra of } H \text{ かつ } A\text{-module direct summand of } H\}$$

$$\mathcal{G} = \{B \mid \text{distinguished intermediate ring between } A \,\&\, C\}$$

とおくと, 対応: $U \mapsto Ker(U^+)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ の上への1対1対応を与える.

ただし, 中間環 B が distinguished であるとは, $Hom_A(C, C)$ の中で考えて, $C.(H^+ \cap \mathcal{D}er(C/B)) = \mathcal{D}er(C/B)$ をみたすときをいう。$H^+ = Ker(\varepsilon)$ で, ε は H の augmentation map である。

また，$\mathfrak{V}^+ = \mathfrak{V} \cap \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ である。

中間環Bで，CがB-projectiveなるものに対しては，Bがdistinguishedなるために，次の条件は必要かつ十分である。

″$\mathrm{Der}(C/B)$ は C-module direct summand of $\mathrm{Der}(C/A)$ だから $\mathrm{Der}(C/A) = \mathrm{Der}(C/B) \oplus M$ と表せる。このときprojection: $\mathrm{Der}(C/A) \to M$ を Proj_M とかくと，$C \otimes \mathrm{Proj}_M(H^+) = C\,\mathrm{Proj}_M(H^+)$ なることである。″

したがって，上のとき，$\mathrm{Proj}_M(H^+)$ はA-projectiveである。

定理1の証明　Hがsplitしていることより $H = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}(H)} \mathfrak{V}_g$. $\mathfrak{V}_g = 0$ $(g \neq 1)$ を示す。localizationして考えればよいから，Aはlocalとしてよい。このとき $C \otimes C$ はlocalで，$C \otimes C \cong C \otimes H^*$ より H^* もlocal. したがって，$H = (H^*)^*$ はirreducible. ゆえに $\mathfrak{V}_g = 0$ $(g \neq 1)$. これより $H = A1 \oplus H^+$ をうる。Δ, Γ はGalois correspondence theoremのものとする。$\mathfrak{V} \in \mathfrak{F}$ に対して，$C \otimes \mathfrak{V}^+ \in \Delta$ なることは明らかである。したがって $B = \mathrm{Ker}(C \otimes \mathfrak{V}^+) = \mathrm{Ker}(\mathfrak{V}^+)$ は Γ に属し，$\mathrm{Der}(C/B) = C \otimes \mathfrak{V}^+$ となる。$B \in \mathcal{G}$ なることを示そう。$H = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{V}'$ だから，$C \otimes H = (C \otimes \mathfrak{V}) \oplus (C \otimes \mathfrak{V}')$. $\mathfrak{V}' = \mathrm{Proj}_{C \otimes \mathfrak{V}'}(H^+)$ および $C \otimes H \cong C \cdot H$ より $C \otimes \mathrm{Proj}_{C \otimes \mathfrak{V}'}(H^+) \cong C \cdot \mathrm{Proj}_{C \otimes \mathfrak{V}'}(H^+)$ をうる。ゆえに $B \in \mathcal{G}$. 逆に，$B \in \mathcal{G}$ としよう。このとき $B \in \Gamma$ より，$\mathrm{Der}(C/A) = \mathrm{Der}(C/B) \oplus M$ となる。完全系列

$$0 \to U^+ \to H^+ \to K_0 \to 0$$

ただし、$K_0 = Proj_M(H^+)$, $U^+ = Ker(Proj_M / H^+)$ は split する。したがって $H^+ = U^+ \oplus K$ とかける。ただし、K は $K \cong K_0$ なる H^+ の A-submodule である。$\{A\}$ を modulus として考えて、次数を比較すれば、$C \otimes U^+ = Der(C/B)$ をうる。$U = A1 + U^+$ とおく。このとき U が H の subalgebra をなすことは明らかであるが、さらに subcoalgebra をなすことは、$C \otimes U^+$ が operator $[\quad]$ に関して閉じていることから出る。U が A-module direct summand of H なることは自明だから、$U \in \mathfrak{F}$ をうる。対応：$U \mapsto Ker(U^+)$ が $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{G}$ の間の1対1対応を与えることは、Galois correspondence theorem より明らかであろう。

§4. 問題II について。以下において、A は標数≠0 の体とする。さらに、H は cocommutative pointed Hopf algebra over A, C は Galois H^*-object/A で、A上 strongly radicial extension になっているものとする。coalgebra が、pointed であるとは、すべての simple subcoalgebra が1次元なることである。

H の元および C#H の元は、$Hom_A(C, C)$ の元と同一視する。このとき $C \otimes H^+ = Der(C/A)$. したがって

$$Hom_C(\mathcal{D}er(C/A), C) \cong Hom_C(C\otimes H^+, C) \cong C\otimes Hom_A(H^+, A)$$
$$\cong C\otimes (H^*)^+.$$

これより, $C\otimes(H^*)^+ \cong J_{C/A}$ as left C-modules.

lemma 2. $J_{C/A} \cong C\otimes(H^+)^*$ as rings

(証). $F, G \in Hom_C(C\otimes H^+, C)$ に対して, 積 $F*G$ を

$$F*G : 1\otimes d \mapsto \sum_{(d)'} F(1\otimes d_{(1)})G(1\otimes d_{(2)})$$

で定義すれば, $Hom_C(C\otimes H^+, C)$ は環をなす。ただし, $\sum_{(d)'} d_{(1)}\otimes d_{(2)} = \delta(d) - 1\otimes d - d\otimes 1$. このとき $Hom_C(C\otimes H^+, C) \cong C\otimes(H^+)^*$ as rings. したがって, $J_{C/A} \cong Hom_C(C\otimes H^+, C)$ as rings を示せばよい。 C-module isomorphism $\alpha : J_{C/A} \to Hom_C(C\otimes H^+, C)$ は, $\alpha(1\otimes x - x\otimes 1)(c\otimes d) = cd(x)$ である. したがって, $\alpha((1\otimes x - x\otimes 1)(1\otimes y - y\otimes 1))(1\otimes d) = d(xy) - xd(y) - d(x)y = \sum_{(d)'} d_{(1)}(x)d_{(2)}(y)$. 他方, $\{\alpha(1\otimes x - x\otimes 1) * \alpha(1\otimes y - y\otimes 1)\}(1\otimes d) = \sum_{(d)'} \alpha(1\otimes x - x\otimes 1)(1\otimes d_{(1)})\alpha(1\otimes y - y\otimes 1)(1\otimes d_{(2)}) = \sum_{(d)'} d_{(1)}(x)d_{(2)}(y)$

ゆえに, α は ring-isomorphism である.

H は coalgebra として, irreducible だから, $A1$ は H の coradical である. $H_i = \wedge^{i+1}(A1)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく このとき つぎのことが成立する (Sweedler; Hopf-algebra を参照)

(1) $H = \bigcup_i H_i$

(2) $H_0 = A1$

(3) $H_1^+ = P(H)$ ただし $P(H) = \{d \in H \mid \delta(d) = 1 \otimes d + d \otimes 1\}$

(4) $\delta(H_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i}$

(5) $\lambda(H_i) \subseteqq H_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$ ただし λ は H の antipode である。

定理3. $C_i = \mathrm{Ker}(H_i^+)\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと、次のことが成立する。

(1) C は strongly radicial extension of C_i である。

(2) $C_i = \mathrm{Ker}(\mathcal{D}er_i(C/A))$

(3) $C \# A[H_i] = \mathrm{Hom}_{C_i}(C, C)$

(4) $C_{i+1} = \mathrm{Ker}(\mathcal{D}er_1(C_i/C_{i+1}))$

(証) lemma 2 より $J/J^{i+1} \cong C \otimes (H^*)^+/((H^*)^+)^{i+1}$

ゆえに、$\mathcal{D}er_i(C/A) \cong \mathrm{Hom}_C(J/J^{i+1}, C)$

$$\cong C \otimes \mathrm{Hom}_A((H^*)^+/((H^*)^+)^{i+1}, A)$$

ところが、$H_i = [((H^*)^+)^{i+1}]^\perp \cong \mathrm{Hom}_A((H^*)^+/((H^*)^+)^{i+1}, A)$

なる故、left C-module として、

$$\mathcal{D}er_i(C/A) \cong C \otimes H_i^+$$

したがって、

$$C[\mathcal{D}er_i(C/A)] = C \otimes A[H_i^+]$$

とみれる。ゆえに $\{C[\mathcal{D}er_i(C/A)]\}^+ \in \Delta$. このことは (1), (2)

(3) を示している。(4) の証明をする。$C_{i+1} \subseteq Ker(Der_1(C_i/C_{i+1}))$ は自明である。$x \in Ker(Der_1(C_i/C_{i+1}))$, $x \notin C_{i+1}$ なる x が存在したとする. このとき, $d \in H^+_{i+1}$ があって, $d(x) \neq 0$. ところで C は C_i-free なる故, projection $p: C \to C_i$ を適当にとれば, $(pd)(x) \neq 0$. d は ordinary C_{i+1}-derivation ; $C_i \to C$ をひきおこすゆえ, $pd \in Der_1(C_i/C_{i+1})$ とみれる. これは矛盾である。ゆえに, $C_{i+1} = Ker(Der_1(C_i/C_{i+1}))$.

基礎環が体をなすとき, 問題II の解を, 次の定理は与えている。

定理4. A は, 標数が 0 でない体, H を A 上の cocommutative pointed Hopf-algebra, C を A 上 strongly radicial な Galois H^*-object とする。このとき C の subring の列 $C = C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n = A$ が存在して,

(1) C_i は有限生成射影的 C_{i+1}-module

(2) $d(C_i) \subseteq C_i$ $({}^\forall d \in H)$

(3) 自然な写像 ; $C_i \otimes H \to Hom_A(C_i, C_i)$ は epimorphism

(4) $C_i[Der_1(C_i/C_{i+1})] = Hom_{C_{i+1}}(C_i, C_i)$

これを証明するために, 3つの lemma が必要である。

Lemma 5. J/J^2 は C 上 free である。ただし, $J = J_{C/A}$.

(証). C_1 を定理3のようにとれば，C は C_1 上 p-basis をもつ[8, Theorem 10]．したがって，J_1/J_1^2 は C 上 free．ただし $J_1 = J_{C/C_1}$．ところが，C-module として，$J/J^2 \cong J_1/J_1^2$．

Lemma 6. C_1 を上の Lemma の証明のようにとれば，A-algebra C の generators $t_1, t_2, \cdots, t_r$ が存在して，$C_1 = A[t_1^p, t_2^p, \cdots, t_r^p]$ となる．ただし，p は A の標数．

(証). $t_1\ t_2, \cdots, t_r \in C$ を，$\{1\otimes t_i - t_i \otimes 1 \mod J^2\}$ が J/J^2 の $C\otimes 1$-module basis なるようにとる．このとき $C = A[t_1, t_2, \cdots, t_r]$ である．したがって，任意の $x \in C_1$ に対して $x = \sum a_{(e)} t_1^{e_1} t_2^{e_2} \cdots t_r^{e_r}$ とかける．ただし $a_{(e)} \in A$．今 $d_1, d_2, \cdots d_r \in \mathscr{D}_{er_1}(C/A)$ で，$d_i(t_j) = \delta_{ij}$ なる $d_1, \cdots, d_r$ を用いて，e_i 自律中であることが示される．

Lemma 7. $d \in H^+$，$x \in C$ ならば，$d(x^{p^t}) \in A \cdot C^{p^t}$ $(t=0, 1, 2, \cdots)$．

(証). $d_0 (=1), d_1, d_2, \cdots, d_l$ は H の A-basis とする。このとき $\delta_m(d) = \sum a_{(i)} d_{(i_1)} \otimes d_{(i_2)} \otimes \cdots \otimes d_{(i_m)}$ とかける。ただし，$a_{(i)} \in A$，$m = p^t$，$\delta_m = (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \delta) \cdots (1 \otimes \delta)\delta$．$H$ は cocommutative だから，$a_{(i_1, \cdots, i_m)} = a_{(j_1, j_2, \cdots, j_m)}$ ただし，$(j_1, \cdots, j_m)$ は $(i_1, i_2, \cdots, i_m)$ の permutation である。したがって

$$d(x^m)=\sum_{0\leq k_1\leq\cdots\leq k_m}\frac{m!}{\alpha!\beta!\cdots\gamma!}\,a_{(k_1,\cdots,k_m)}\,d_{k_1}(x)\cdots d_{k_m}(x)$$

ただし，$\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ は $\{k_1,\cdots,k_m\}$ の中の等しい数の個数．

ところで，
$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\gamma!}\equiv 0 \mod . p \quad \text{unless } k_1=k_2=\cdots=k_n.$$

ゆえに，Lemma 7 をうる。

定理４の証明．　C_i，H_i を定理３と同じものとする．このとき　$C=C_0\supset C_1\supset\cdots\supset C_n=A$　が，定理の条件(1)～(4)をみたすことを示す。(1)は明らかである。$i=1$ のとき(2)は Lemma 6，7 からいえる。C_1-module C は $C=C_1\oplus C_1'$ とかけることを用いて，(3)がいえる。一方，定理３から，$C\otimes A[H_2]=\mathrm{Hom}_{C_2}(C,C)$ だから，C_1-module $\mathrm{Hom}_{C_2}(C_1,C_1)$ は，$A[H_2]$ の元でひきおこされた C_1 の endomorphism で生成される　ところが　H_2^+ の元は，C_1 の ordinary derivation をひきおこすゆえ，$C_1[\mathrm{Der}_1(C_1/C_2)]=\mathrm{Hom}_{C_2}(C_1,C_1)$ をうる。したがって　$C_2=\mathrm{Ker}(H_2^+)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Der}_1(C_1/C_2))$ である。再び Lemma 6 を用いて $t_1,t_2,\cdots,t_r\in C_1$ を適当にとれば，$C_2=A[t_1^p,t_2^p,\cdots,t_r^p]$ となる．したがって，$C_2=AC^{p^2}$．以下，上と同じ議論をくりかえして定理をうる。

系．定理4と同じ状態の下に，さらに K は，C-algebra で，C-module として有限生成射影的とする．このとき Amitsur cohomology group について

$$H^n(K/A)=H^n(K/C) \qquad (n>2)$$

$$0 \to H^2(C/A) \to H^2(K/A) \to H^2(K/C) \to 0$$

は exact

（証）．Rosenberg-Zelinsky [5] によって次の exact sequence がえられている

$$\cdots \to H^{n-1}(K/C) \to H^n(C/A) \to H^n(K/A) \to H^n(K/C) \to \cdots$$

ここで一般に $H^1(K/C)=0$．上の定理と，上の exact sequence を用いて，$H^n(C/A)=0 \ (n>2)$．ただし，Yuan によって $H^n(C_i/C_{i+1})=0 \ (n>2)$ [10] が示されている。再び上の exact sequence を用いれば，系がえられる。

系について，もっと一般の場合に同じ結果がえられるということを昨年（1964年）に学会で発表したが，証明に間違いがあって，結果が正しいかどうかは，今のところ不明である。しかし，系において，C が Galois object であるという仮定がなくても同じ結果がえられることが村井君によって証明された。

References

[1]. S. A. Amitsur : Homology groups and douple complexes for arbitrary fields, J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 73–112.

[2]. N. Bourbaki : Algèble commutative, Chap. 1, 2. Hermann 1961.

[3]. S. U. Chase and M. E. Sweedler : Hopf Algebras and Galois Theory, Lecture Notes in Math. Vol. 97, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[4] Y. Nakai : High order derivations I, Osaka J. Math. 7 (1970), 1–27.

[5]. A. Rosenberg and. D. Zelinsky : Amitsur's complex for inseparable fields, Osaka Math. J. 14 (1962), 219–240.

[6]. M. E. Sweedler : Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.

[7] Y. Takeuchi : On strongly radicial extensions, to appear in Pacific J. Math.

[8] S. Yuan : Inseparable Galois theory of exponent one, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 163–170.

[9] —— : Finite dimensional inseparable algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 577–589.

[10]. —— : Central separable algebras with purely inseparable splitting rings of exponent one, Trans. Amer. Soc. 153 (1971), 427–450.